

Перечень билетов для зачета по геометрии 8 класс

Критерии оценивания.

Номер вопроса в билете	Шкала оценивания	примечание
0	от 0 до 1 балла	1 балл, если дан полный и правильный ответ; 0 баллов во всех других случаях.
2	от 0 до 2 баллов	2 балла, если теорема правильно сформулирована и представлено ее доказательство; 1 балл, если сформулирована правильно теорема без доказательства; 0 баллов во всех других случаях.
3	от 0 до 1 балла	1 балл, если дан полный и правильный ответ; 0 баллов во всех других случаях.
4	от 0 до 2 баллов	2 балла, если выбран правильный путь решения, понятны рассуждения, дан верный ответ; 1 балл, если допущена ошибка, не носящая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения или ошибка вычислительного характера; 0 баллов во всех других случаях.

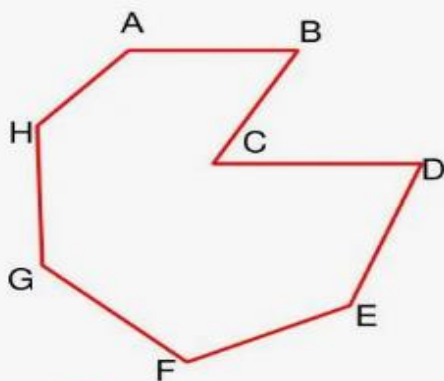
Шкала перевода баллов в школьную отметку

балл	отметка
0-1	пересдача
2-3	«3»
4	«4»
5-6	«5»

1. Многоугольник: определение, элементы, периметр. Формулу суммы углов выпуклого многоугольника (записать).

Определение: **Многоугольник** – фигура, состоящая из нескольких точек (больше двух) и соответствующего количества отрезков, которые их последовательно соединяют.

Понятие многоугольника



8-угольник
(8 – вершин;
8 – углов;
8 – сторон)

- Точки A, B, C, D, E, F, G, H – **ВЕРШИНЫ** многоугольника
- Отрезки AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA – **СТОРОНЫ** многоугольника
- Углы HAB, ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, GHA – **УГЛЫ** многоугольника
- Сумма длин сторон многоугольника – **ПЕРИМЕТР** многоугольника
- Многоугольник с **n** вершинами наз. **n-угольником**

Итак, сумма углов выпуклого **n-угольника** равна $(n-2) \cdot 180^\circ$.

2. Теорема о средней линии треугольника (формулировка, доказательство).

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

Пусть MN – средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$.

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ – общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства – что $MN = \frac{1}{2} AC$. Теорема доказана.

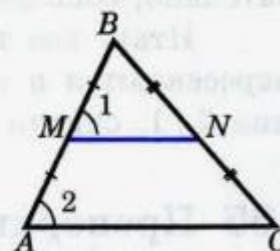
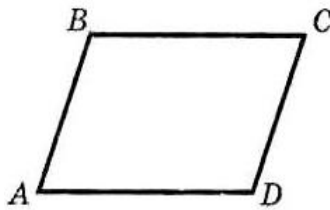


Рис. 195

1. Параллелограмм: определение, свойства.



Определение. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называют **параллелограммом**.

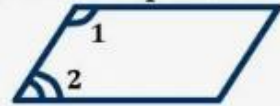
$ABCD$ — параллелограмм

$\Leftrightarrow$

$AB \parallel CD, BC \parallel AD$

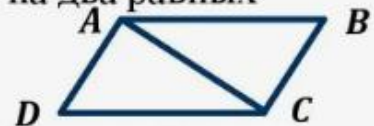
Свойство 1. Сумма углов при соседних вершинах параллелограмма равна 180° .

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$



Свойство 2. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

$$\triangle ABC = \triangle CDA$$



Свойство 3. У параллелограмма противоположные стороны равны.



Свойство 4. У параллелограмма противоположные углы равны.



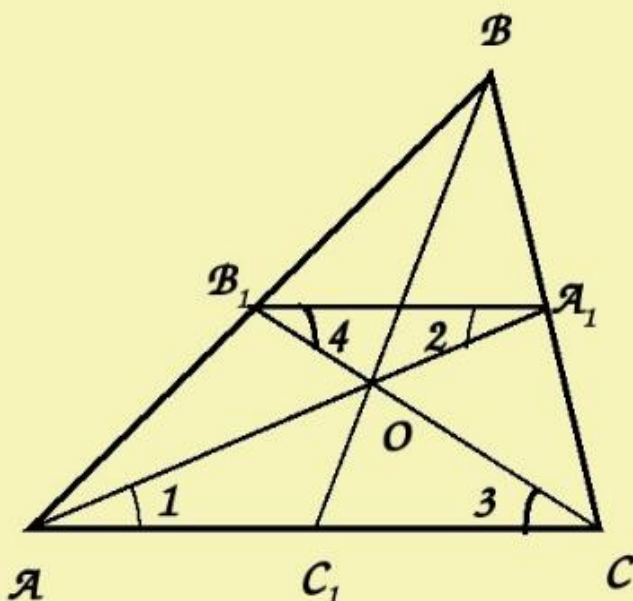
Свойство 5. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



2. Теорема о свойстве медиан треугольника (формулировка, доказательство).

Свойство медиан треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Решение:

$A_1B_1 \parallel AB$, и по том

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ и } \angle 3 = \angle 4$$

$\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ по двум углам

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1} \quad (\text{по определению})$$

подобных треугольников)

Но $AB = 2A_1B_1$, и по том

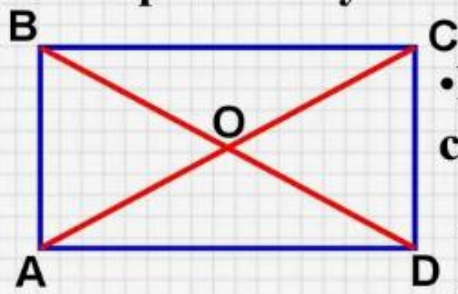
$$AO = 2A_1O, \quad BO = 2B_1O$$

Таким образом точка O делит

медианы AA_1 и BB_1 в отношении 2:1.

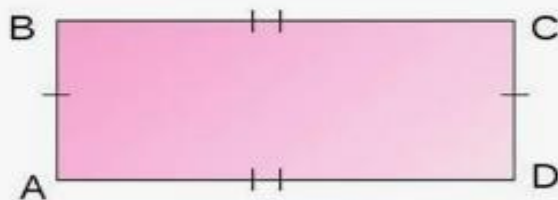
1. Прямоугольник: определение, свойства.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые

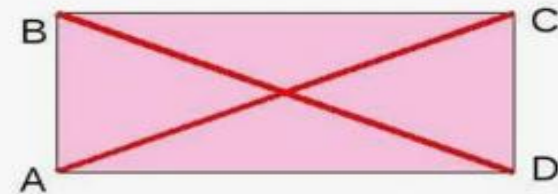


Свойства прямоугольника

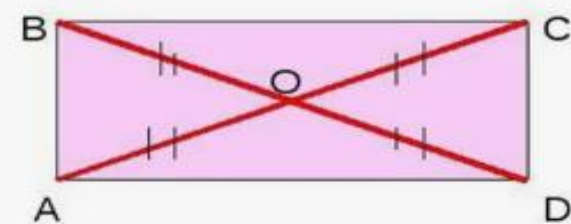
- Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма
- Диагонали прямоугольника равны **$AC = BD$**



1. Противоположные стороны равны
 $(AB=CD; BC=AD)$



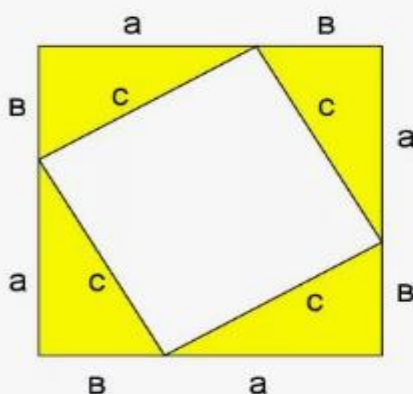
2. Диагонали равны
 $(AC=BD)$



3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам
 $(AO=OC; BO=OD)$

2. Теорема Пифагора (формулировка, доказательство).

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов



Дано: прямоугольный треугольник
 a, b – катеты, c – гипотенуза

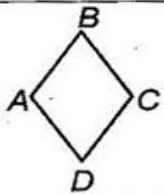
Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$

Доказательство:

1. Построим треугольник до квадрата со стороной $a+b$;
2. $S = (a+b)^2$ - площадь квадрата
3. Четыре прямоугольных треугольника, $S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab$
4. $S = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + c^2 = 2ab + c^2$
5. $(a+b)^2 = 2ab + c^2$
6. $c^2 = a^2 + b^2$



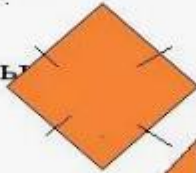
1. Ромб: определение, свойства.



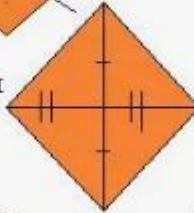
Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны.
Если $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = AD$ то $ABCD$ – ромб.

СВОЙСТВА РОМБА

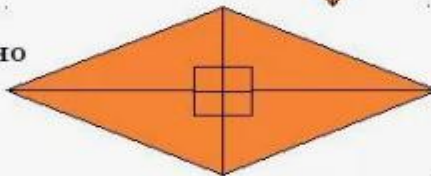
1. Противоположные стороны ромба равны



2. Диагонали точкой пересечения делятся пополам



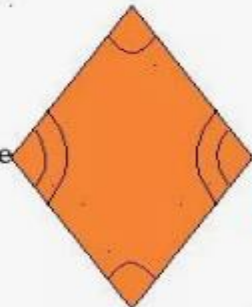
3. Диагонали взаимно перпендикулярны



4. Диагонали делят углы пополам



5. Противоположные углы равны



2. Теорема о вписанном угле (любой частный случай) (формулировка, доказательство).

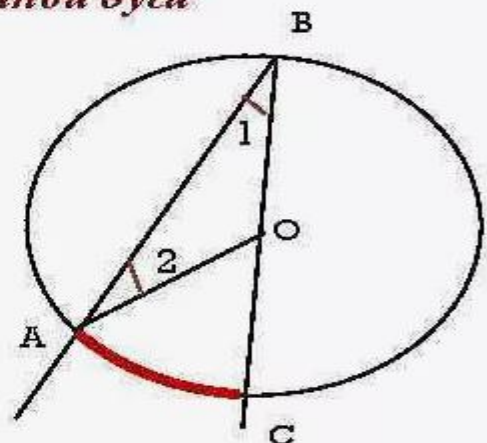
ТЕОРЕМА

Вписанный угол измеряется половиной дуги на которую он опирается.

Дано : $\angle ABC$ – вписанный

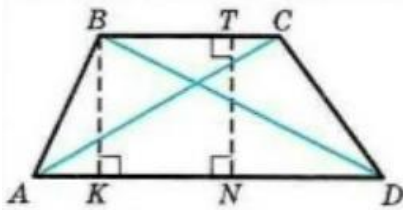
Доказать : $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$

Рассмотрим 1 случай:
луч BO совпадает с одной из сторон $\angle ABC$.



- $\angle AOC = \cup AC$, т.к. $\angle AOC$ – центральный.
- Так как $\angle AOC$ – внешний угол $\triangle ABO$, и $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$.
- Отсюда следует, что $2\angle 1 = \cup AC$ или $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AC$;
т.о. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Ч.т.д.

1. Трапеция: определение, свойства, виды.



Определение. Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны, называют **трапецией**.

$ABCD$ — трапеция, AD и BC — основания, AB и CD — боковые стороны, AC и BD — диагонали, BK и TN — высоты.

Виды трапеции

Равнобедренная

- Трапеция называется **равнобедренной** (или **равнобокой**), если ее боковые стороны равны.



Прямоугольная

- Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной**.



Разносторонняя

- Все стороны трапеции имеют разную длину.



Свойства для любой трапеции:

- Сумма углов при боковых сторонах = 180 градусов.
- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Свойства для равнобокой трапеции:

- Боковые стороны равны.
- Углы при основании равны.
- Диагонали равны.
- Сумма противоположных углов = 180 градусов (на всякий случай скажу, что для равнобокой трапеции так же работают теоремы для любой трапеции, которые я написала выше).

2. Теорема о свойстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки (формулировка, доказательство).

Теорема

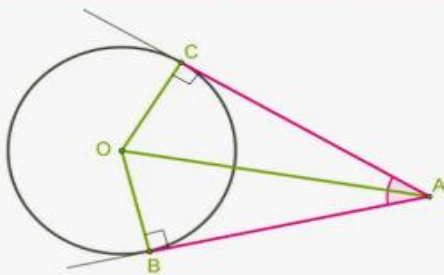
Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Дано: AC и AB — касательные

Доказать: $AC = AB$, $\angle CAO = \angle BAO$

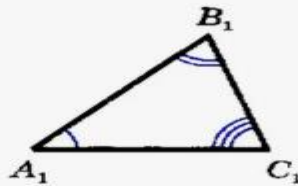
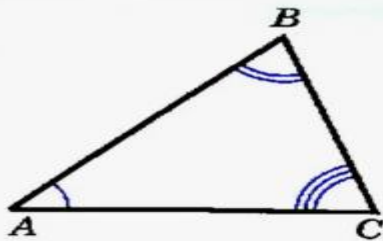
Доказательство

- Так как AC и AB — касательные, то $AC \perp OC$, $AB \perp OB$, а $\triangle ACO$ и $\triangle ABO$ — прямоугольные.
- $\triangle ACO = \triangle ABO$ (по общей гипотенузе AO , и равным катетам $OC = OB$ — радиусы).
- Из равенства треугольников следует, что $AC = AB$, $\angle CAO = \angle BAO$



1. Подобные треугольники: определение, признаки подобия.

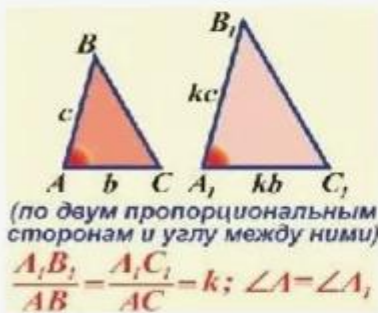
Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k.$$

Признаки подобия

I. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.



II. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



III. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.



2. Признак параллелограмма (по точке пересечения диагоналей) (формулировка, доказательство).

Теорема. 3-й признак. Если у четырёхугольника диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Доказательство.

Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle COD$.

$AO = OC$ по условию,

$BO = OD$ по условию,

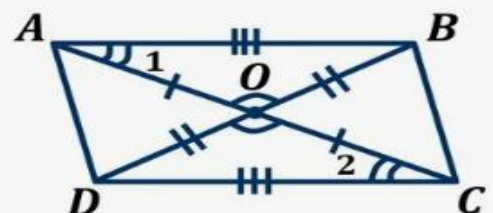
$\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные.

$\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку.

Следовательно, $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$.

Так как $\angle 1, \angle 2$ – накр. лежащие при AB и CD и секущей AC , то $AB \parallel CD$.

$AB = CD$, $AB \parallel CD$, тогда по 1-му признаку $ABCD$ – параллелограмм.



Билет 7

1. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника: определение.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin C = \frac{AB}{BC}$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos C = \frac{AC}{BC}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC}$$



2. Свойство диагоналей параллелограмма (формулировка, доказательство).

Свойство 5. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство.

Рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle COB$.

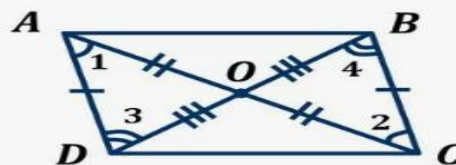
$AD = BC$ как противоположные стороны,

$\angle 1 = \angle 2$ как накр. лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC ,

$\angle 3 = \angle 4$ как накр. лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD .

$\triangle AOD = \triangle COB$ по второму признаку.

Следовательно, $AO = OC$, $BO = OD$.



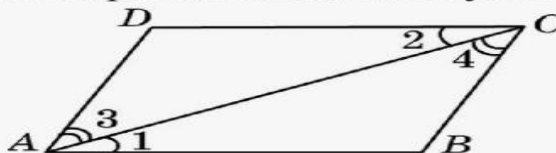
Билет 8

1. Значения синуса, косинуса и тангенса углов 30° , 45° , 60° .

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. Сформулируйте и докажите свойства противоположных сторон и углов параллелограмма.

Свойство 2. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

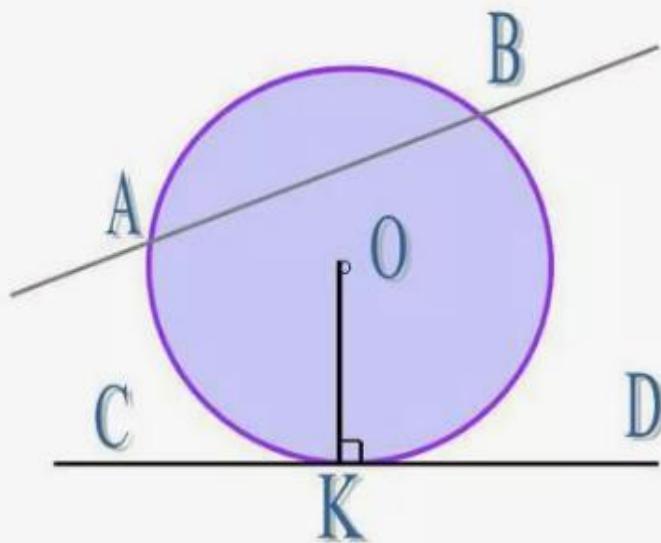


Доказательство. Пусть $ABCD$ – параллелограмм. Диагональ AC разбивает его на два треугольника ABC и CDA , которые равны по второму признаку равенства треугольников (AC – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle B = \angle D$. Кроме этого, $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

1. Секущая и касательная к окружности: определение, рисунок.

Секущая окружности – это прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

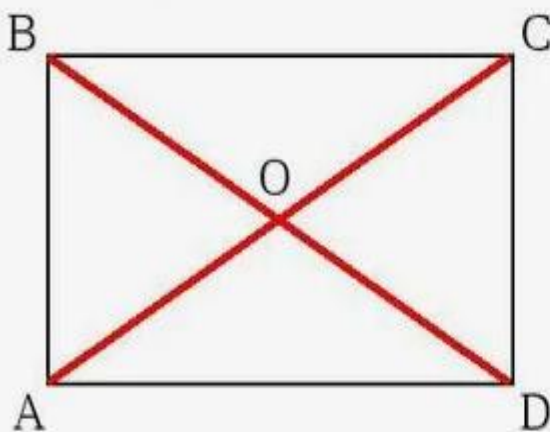
Касательная к окружности – это прямая, имеющая одну общую точку с окружностью.



MyShared

2. Свойство диагоналей прямоугольника (формулировка, доказательство).

Теорема: В прямоугольнике диагонали равны



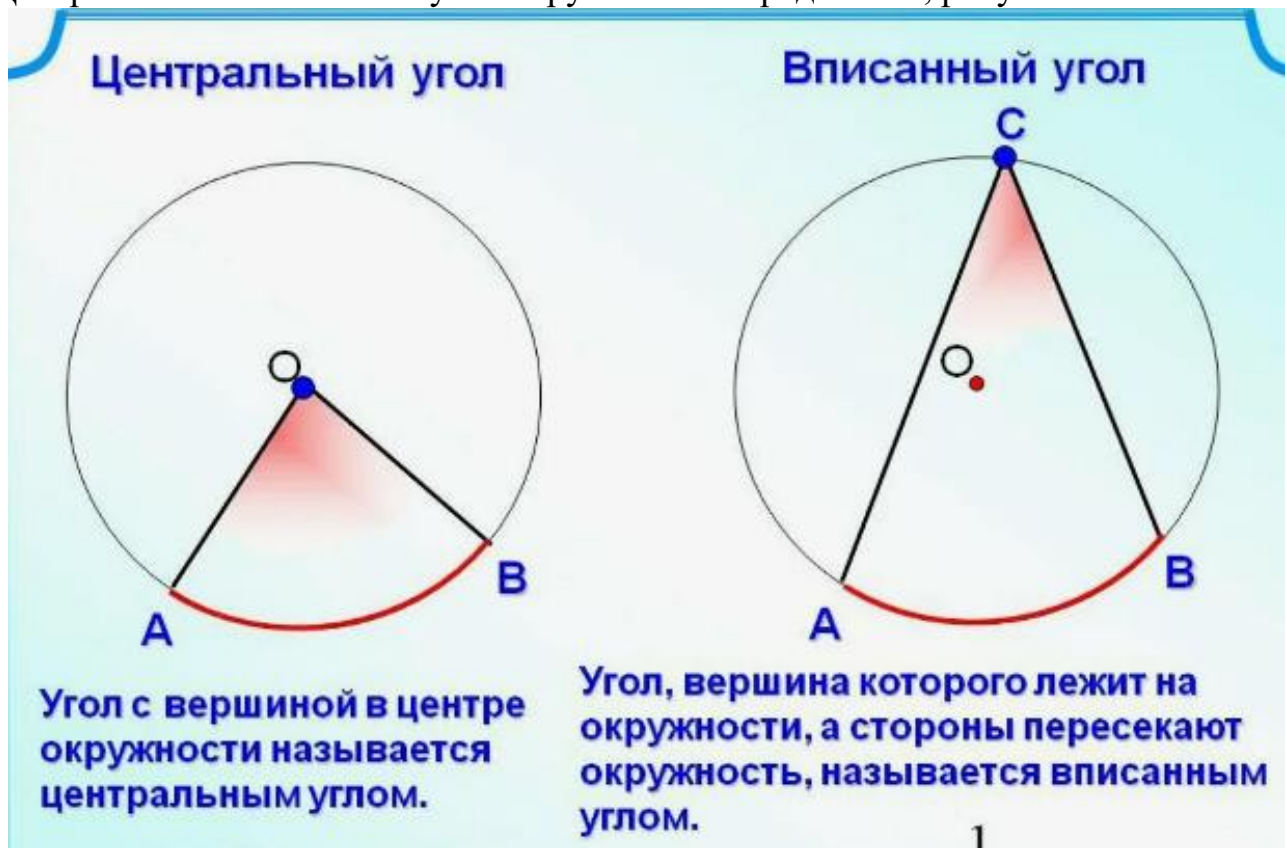
Дано: $ABCD$ – прямоугольник

Доказать: $AC=BD$

Доказательство

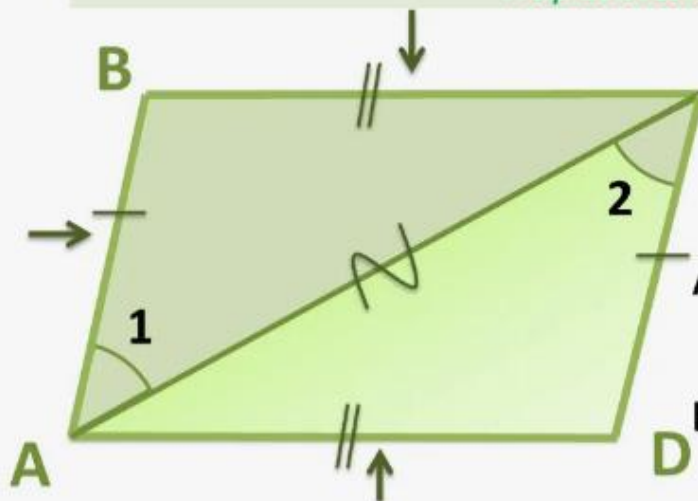
1. $ABCD$ – прямоугольник, AC и BD – диагонали
2. Треугольники ACD и ABD – прямоугольные
3. $\triangle ACD = \triangle ABD$ по двум катетам ($AB=CD$, AD – общий катет)
4. Отсюда следует что гипотенузы этих треугольников равны, $AC=BD$

1. Центральный и вписанный угол окружности: определение, рисунок.



2. Признак параллелограмма по двум противоположным сторонам (формулировка, доказательство).

Признак 2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.



Дано:
ABCD – четырехугольник
 $AB = CD$, $BC = AD$

Доказать:
ABCD – параллелограмм

Доказательство:
рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$,

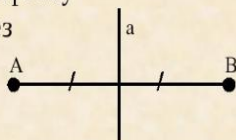
$$\left. \begin{array}{l} AC - \text{общая, } AB = CD, BC = AD \text{ (по условию)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(по 3-му признаку} \\ \text{равенства треугол.)} \end{array}$$

$$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow AB \parallel CD \text{ и } AB = CD \Rightarrow \text{ABCD - параллелограмм} \\ \text{(по 1-му признаку параллелогра.)}$$

Билет 11

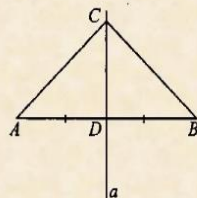
1. Серединный перпендикуляр к отрезку: определение, свойства, построение.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярна к нему.



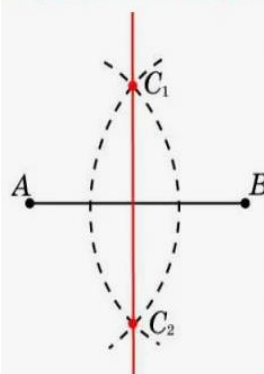
a – серединный перпендикуляр к отрезку AB

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку **равноудалена** от концов этого отрезка.



a – серединный перпендикуляр к отрезку AB ,
 D – середина отрезка AB , $AC = BC$

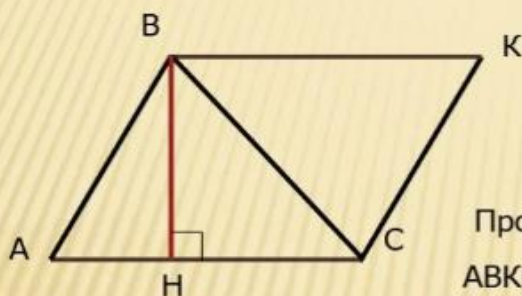
По данному рисунку объясните, как построить серединный перпендикуляр к заданному отрезку.



Решение. Пусть AB – данный отрезок. Опишем окружности с центрами в точках A и B и радиусом, большим половины AB . Обозначим точки их пересечения, лежащие по разные стороны от прямой AB , через C и D . Точки C и D одинаково удалены от концов отрезка AB . Следовательно, они принадлежат серединному перпендикуляру и, значит, прямая CD и будет искомым серединным перпендикуляром.

2. Площадь треугольника: формула, вывод формулы, следствия. Формула Герона (без доказательства).

✶ Теорема: площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту



Дано: $\triangle ABC$, AC – основание,
 BH – высота

Доказать: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$

Доказательство:

Проведём $BK \parallel AC$, $CK \parallel AB$

$ABKC$ – параллелограмм, его основанием является AC , а высотой является BH

$$S_{ABKC} = AC \cdot BH$$

Треугольники ABC и KCB равны, значит, их площади тоже равны

$$S_{ABKC} = S_{ABC} + S_{KCB}, S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABKC}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

Следствия:

Первое: площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Второе: если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Третье: если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы

Формула Герона

Площадь треугольника со сторонами a, b, c выражается формулой

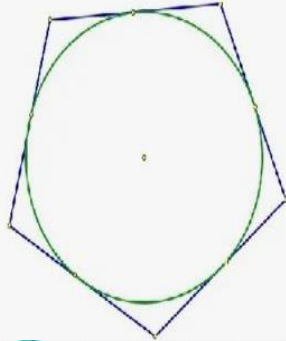
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника

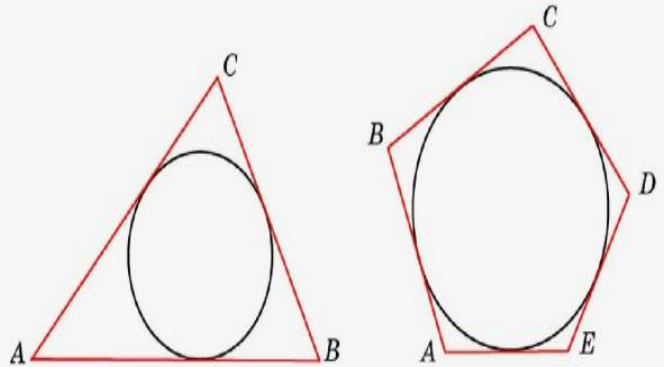
1. Окружность, вписанная в многоугольник: определение, рисунок. Многоугольник, описанный около окружности: определение, рисунок. Свойство описанного четырехугольника (формулировка).

Вписанная окружность

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности

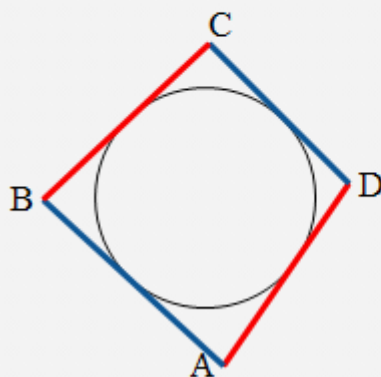


Ответ: Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются этой окружности.



Свойство описанного около окружности четырехугольника

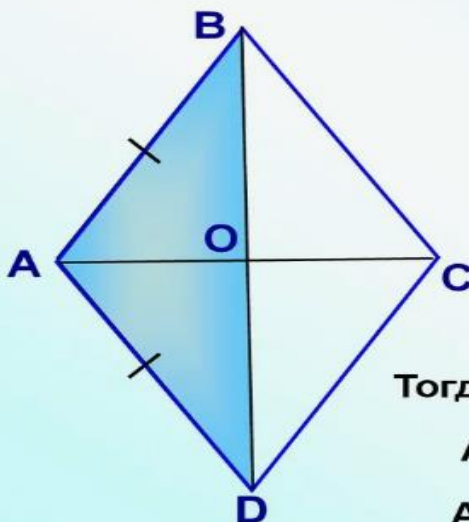
Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны.



$$AB + CD = BC + AD$$

2. Свойство диагоналей ромба (формулировка, доказательство).

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам



Дано: ABCD ромб

Доказать: $AC \perp BD$

$\angle BAC = \angle DAC$

Доказательство:

AB=AD по определению ромба
 $\triangle ABD$ р/б

Так как ромб – параллелограмм,
 то $BO=DO$.

Тогда, AO – медиана

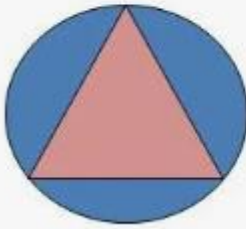
AO – высота

$AC \perp BD$

AO – биссектриса

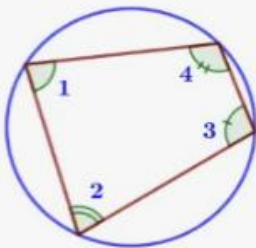
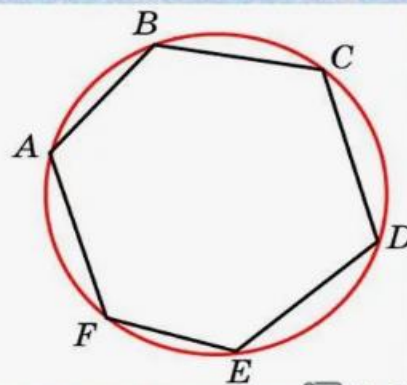
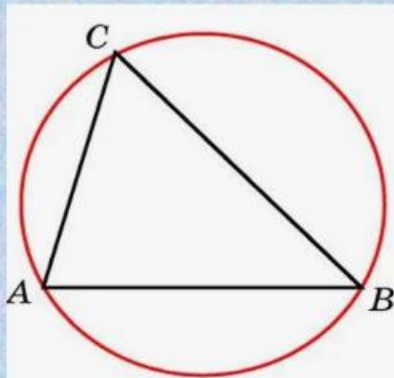
$\angle BAC = \angle DAC$

1. Окружность, описанная около многоугольника: определение, рисунок. Многоугольник, вписанный в окружность: определение, рисунок. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность (формулировка).



Окружность называется описанной около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности.

Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется **описанной** около многоугольника.



В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° :

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$$

2. Свойство биссектрисы угла (формулировка, доказательство).

Теорема о биссектрисе угла.

Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

Доказательство:

1. Обозначим буквой M произвольную точку биссектрисы угла BAC .

2. Проведём $MH \perp AB$ и $MK \perp AC$.

3. Рассмотрим $\triangle AHM$ и $\triangle AMK$:

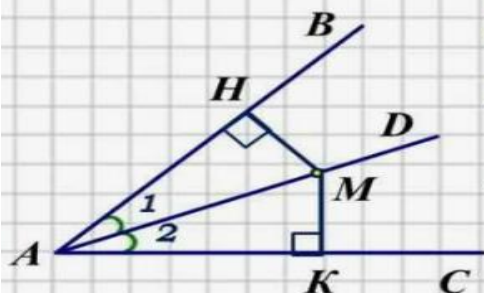
$$\angle H = \angle K = 90^\circ$$

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ (} AD \text{ — биссектриса)} \Rightarrow$$

AM — общая сторона

$$\square AMH = \square AMK \text{ (по ГВ)} \Rightarrow$$

4. $MH = MK$ ч.т.д.



1. Окружность, вписанная в треугольник: определение, рисунок, построение центра.
Окружность, описанная около треугольника: определение, рисунок, построение центра.

Теорема: В любой треугольник можно вписать окружность

Около каждого треугольника можно описать окружность, притом только одну.

Центр окружности, вписанной в треугольник лежит в точке пересечения его биссектрис



Центр окружности, описанной около треугольника лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника



2. Свойство углов при основании равнобедренной трапеции (формулировка, доказательство).

Теорема. Свойство углов равнобедренной трапеции. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

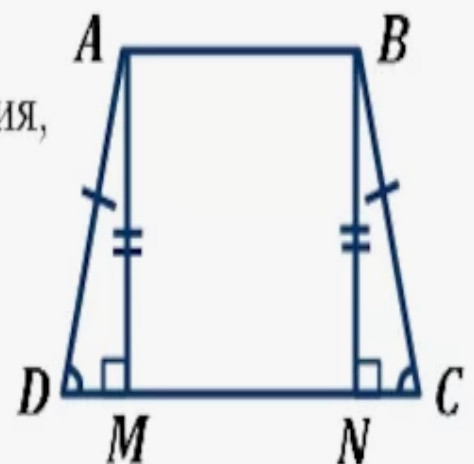
Доказательство.

Рассмотрим прямоугольные $\triangle AMD$ и $\triangle BNC$.

$AD = BC$, так как $ABCD$ – равнобедр. трапеция,
 $AM = BN$.

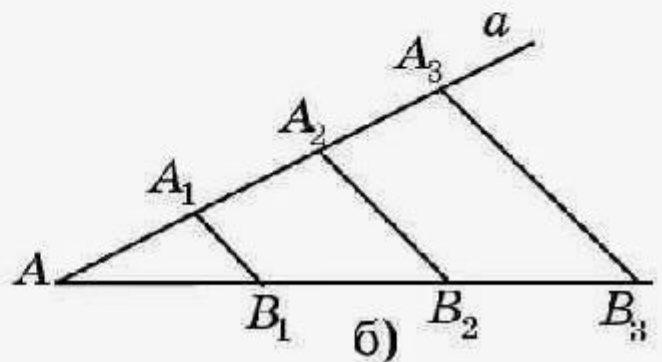
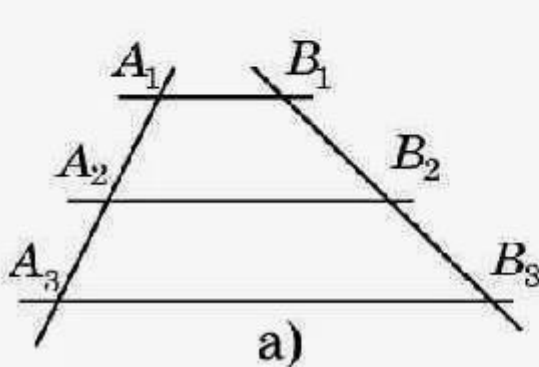
$\triangle AMD = \triangle BNC$ по катету и гипотенузе.

Следовательно, $\angle ADM = \angle BCN$.



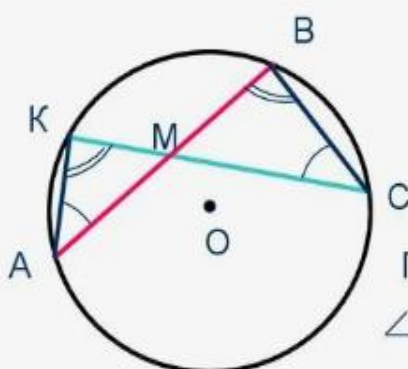
Теорема Фалеса:

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают равные отрезки на одной его стороне, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.



2. Свойство отрезков пересекающихся хорд (формулировка, доказательство).

Теорема. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.



Дано: Окр.(O;r),

M – точка пересечения хорд AB и CK.

Доказать: $AM \cdot BM = CM \cdot KM$.

Доказательство:

Проведём AK и BC. Рассмотрим $\triangle AKM$ и $\triangle BCM$.

$\angle A = \angle C$, как вписанные, опирающиеся на $\text{дугу } BK$.

$\angle K = \angle B$, как вписанные, опирающиеся на $\text{дугу } AC$.

Значит, $\triangle AKM$ и $\triangle BCM$ подобны, следовательно, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{KM}{BM}, \text{ а, значит, } AM \cdot BM = CM \cdot KM.$$



